

VI. Robotermodellierung II

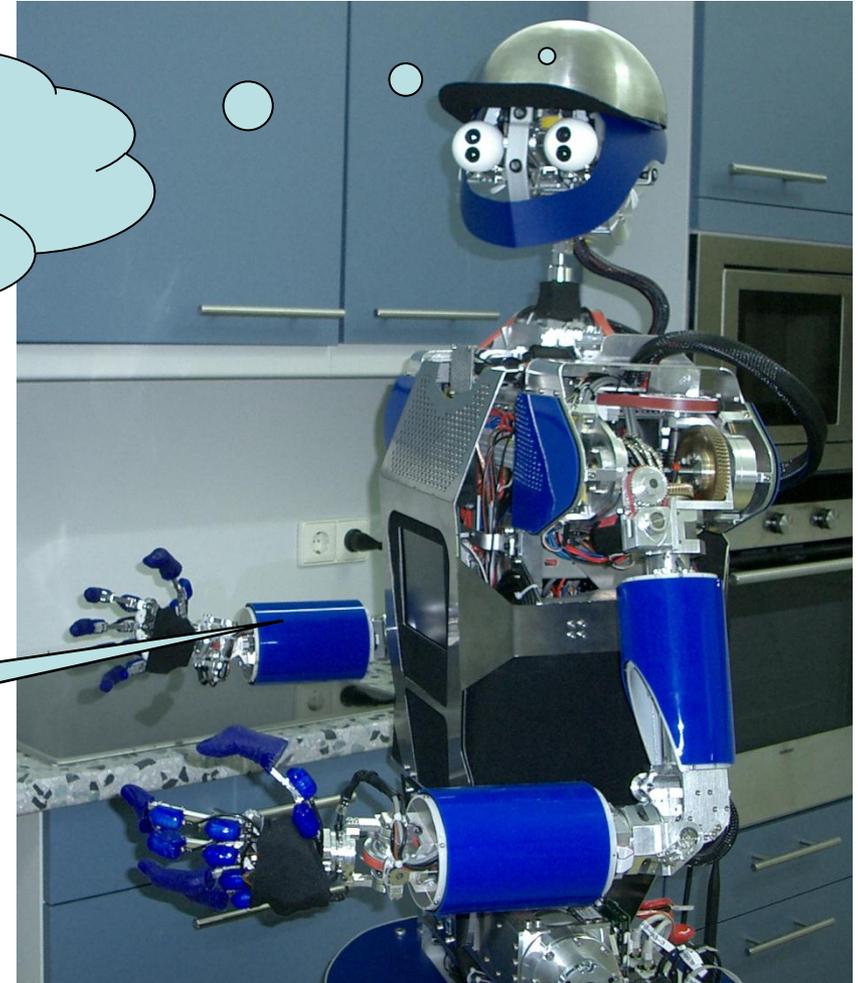
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Dillmann

- Inverses Kinematisches Problem
- Geschlossene Methoden
 - Geometrische Methoden
 - Algebraische Methoden
- Numerische Methoden
- Zusammenfassung

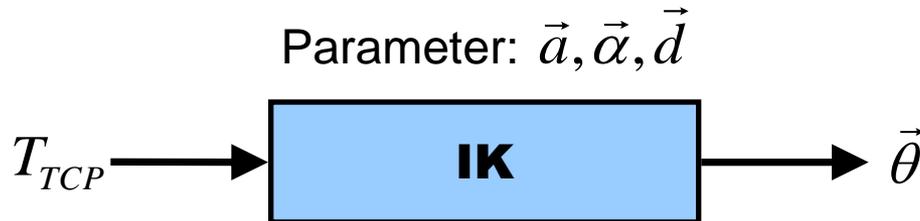
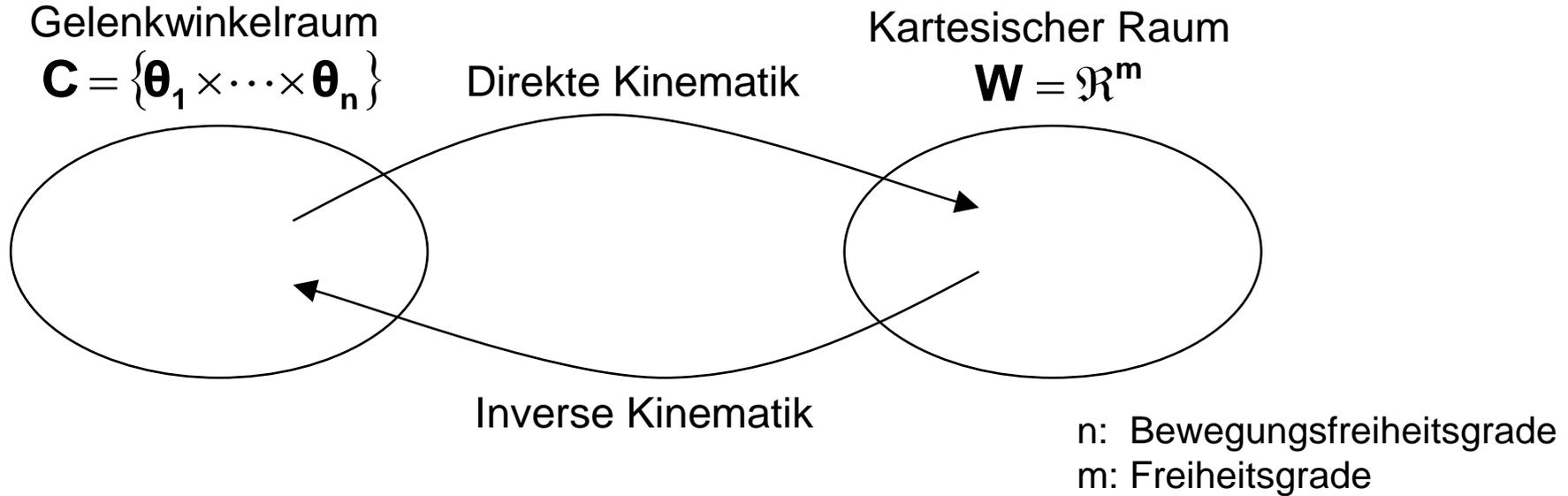
Inverses kinematisches Problem

Wie bewege ich
meine Hand zum
Kühlschrank?

Inverse Kinematik:
Bestimmt die Gelenkwinkel



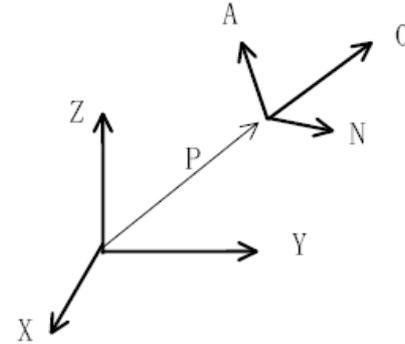
Problemstellung



Vorgehensweise

Lage des TCP:

$$T_{TCP} = \begin{bmatrix} N_x & O_x & A_x & P_x \\ N_y & O_y & A_y & P_y \\ N_z & O_z & A_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Kinematisches Modell:

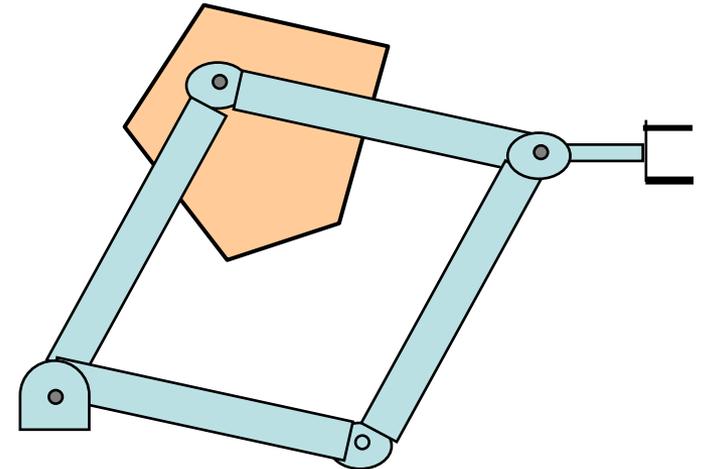
$$T_{TCP} = S_{\text{Basis, Greifer}}(\theta) = A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot \dots \cdot A_{n-2,n-1}(\theta_{n-1}) \cdot A_{n-1,n}(\theta_n)$$

⇒ Gleichung nach θ auflösen

⇒ Nichtlineares Problem

Unzulässige / Unerreichbare Stellungen

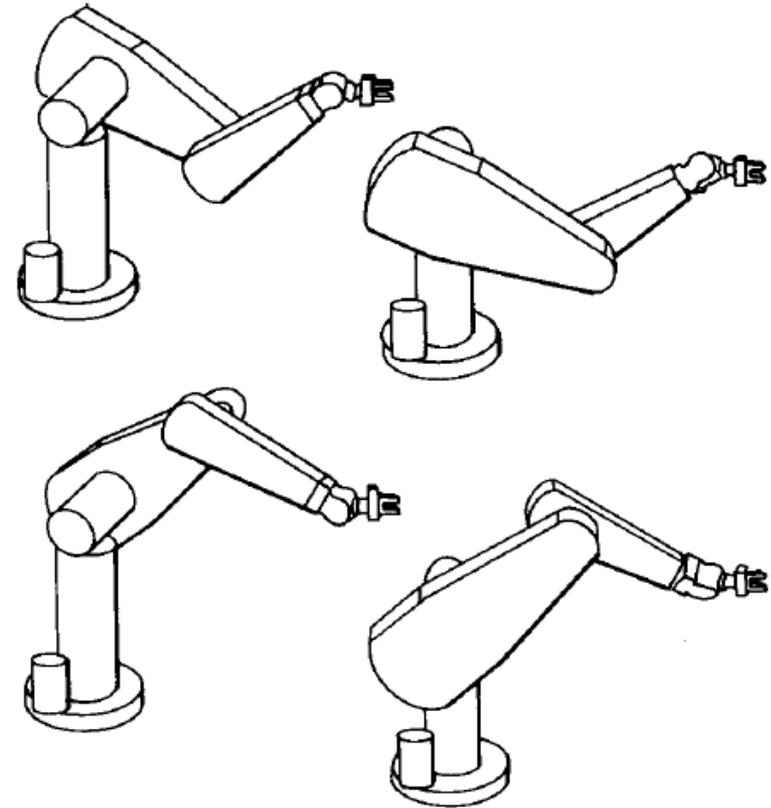
- Eine **unerreichbare** Stellung nennt man solche außerhalb des Armradius des Roboters.
- Eine **unzulässige** Stellung ist prinzipiell erreichbar, jedoch aufgrund physikalischer Randbedingungen nicht einnehmbar:
 - Konstruktionsbedingte Winkelbeschränkungen (Arbeitsraum)
 - Kollision des Roboters mit Hindernissen im Arbeitsraum
 - Kollision von Werkstück oder Effektor mit Hindernissen oder dem Roboter selbst



Die Vermeidung solcher Stellungen sollte bereits bei der Trajektorienplanung berücksichtigt werden (→ Hindernisvermeidung).

Eindeutigkeit

- In der Ebene gibt es für Systeme mit $n \geq 3$ Bewegungsfreiheitsgraden mehrere Möglichkeiten, eine vorgegebene Effektorstellung zu erreichen.
- Im 3D-Fall gilt dies für alle Roboter mit $n \geq 6$ Bewegungsfreiheitsgraden.
- Reduktionsstellungen sind solche, zu deren Erreichen $n < 6$ Bewegungsfreiheitsgrade ausreichen würden.



Gleiche Endeffektorstellung bei unterschiedlichen Konfigurationen

Eigenschaften des IK Problems

- Kein allgemein anwendbares Verfahren
- Anforderungen an Geschwindigkeit:
Die Berechnung der Gelenkwinkel muss schnell erfolgen

Lösungsverfahren

- Lösungen in geschlossener Form
 - Geometrische Methoden
 - Algebraische Methoden
- Numerische Methoden

- Inverses Kinematisches Problem
- Geschlossene Methoden
 - Geometrische Methoden
 - Algebraische Methoden
- Numerische Methoden
- Zusammenfassung

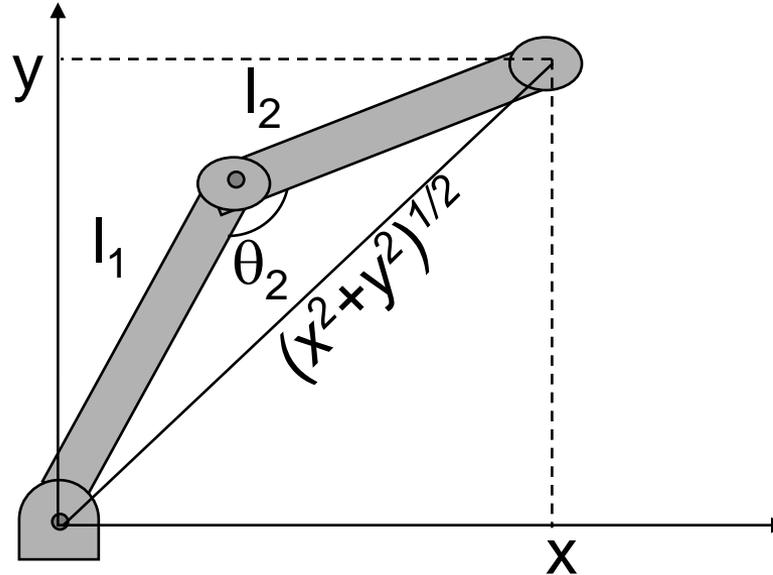
Vorgehen

Nutze geometrische Beziehungen, um die Gelenkwinkel θ aus T_{TCP} zu bestimmen. Das kinematische Modell wird dabei nicht direkt verwendet.

Anwendung von:

- Trigonometrischen Funktionen
- Sinus- / Kosinussätzen

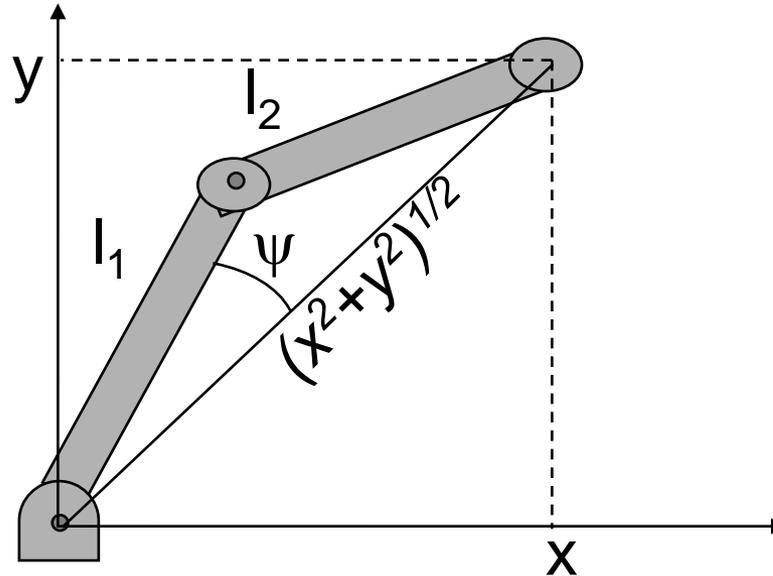
Beispiel (1)



Mit Kosinussatz: $x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\theta_2)$

$$\Rightarrow \cos(\theta_2) = -\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \Rightarrow \theta_2$$

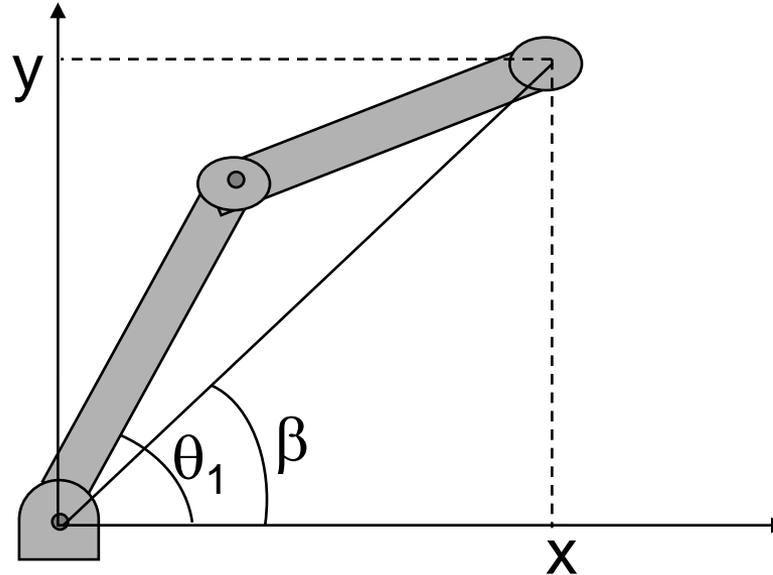
Beispiel (2)



$$l_2^2 = x^2 + y^2 + l_1^2 - 2l_1 \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\psi)$$

$$\Rightarrow \cos(\psi) = \frac{(x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2)}{2l_1 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1)$$

Beispiel (3)



$$\tan(\beta) = \frac{y}{x} \quad \theta_1 = \psi + \beta$$

mit (1) $\Rightarrow \theta_1$

Polynomialisierung

- Transzendente Gleichungen sind in der Regel schwer zu lösen, da die Variable θ gewöhnlich in der Form $\cos \theta$ bzw. $\sin \theta$ auftritt.

Werkzeug: Substitution

$$u = \tan \theta/2$$

unter Verwendung von

$$\cos \theta = (1-u^2) / (1+u^2)$$

$$\sin \theta = 2u / (1+u^2)$$

→ Auflösung von Polynomgleichungen

- Inverses Kinematisches Problem
- Geschlossene Methoden
 - Geometrische Methoden
 - Algebraische Methoden
- Numerische Methoden
- Zusammenfassung

Vorgehen

- Gleichsetzen von TCP Position T_{TCP} und Transformation $S_{Basis, Greifer}$ aus dem kinematischen Modell:

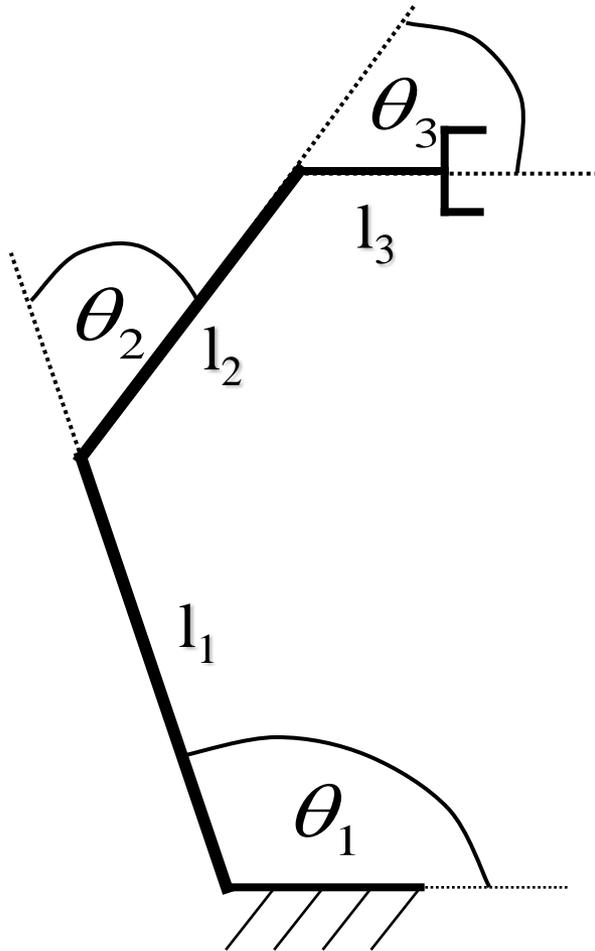
$$T_{TCP} = S_{Basis, Greifer}(\theta)$$

- Koeffizientenvergleich der beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \forall i, j \in [1:n]$$

- ➔ 16 Gleichungen bei homogenen Matrizen in 3D (wovon 4 trivial sind: $0=0$, $1=1$) ➔ 12 Gleichungen

Beispiel (1)



Aus kinematischem Modell:

(Beispiel Vorlesung V.)

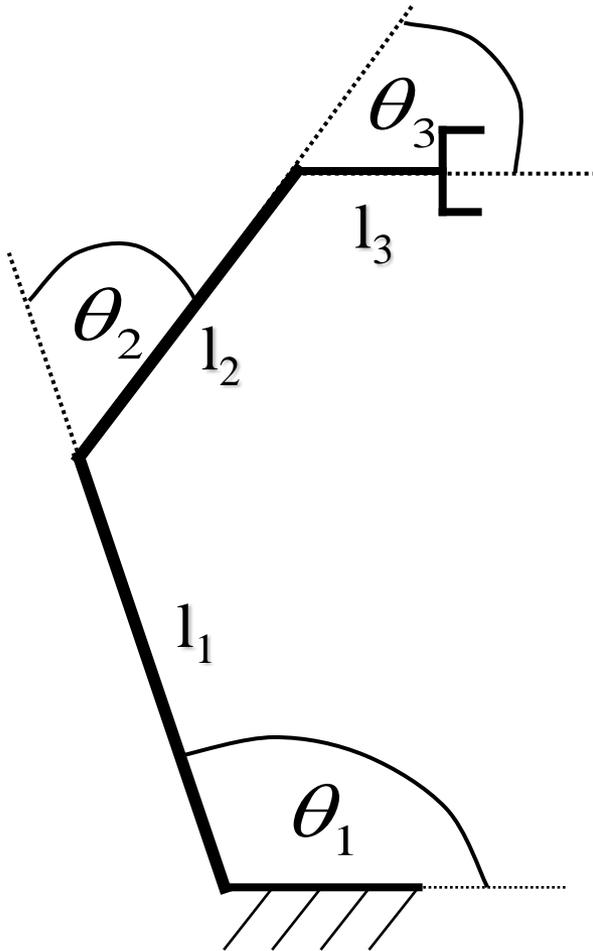
$$S_{Basis, Greifer} = A_{0,3} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gewünschte Lage des Endeffektors:

$$T_{TCP} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abkürzungen: $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, ...

Beispiel (2)



Koeffizientenvergleich:

$$\begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

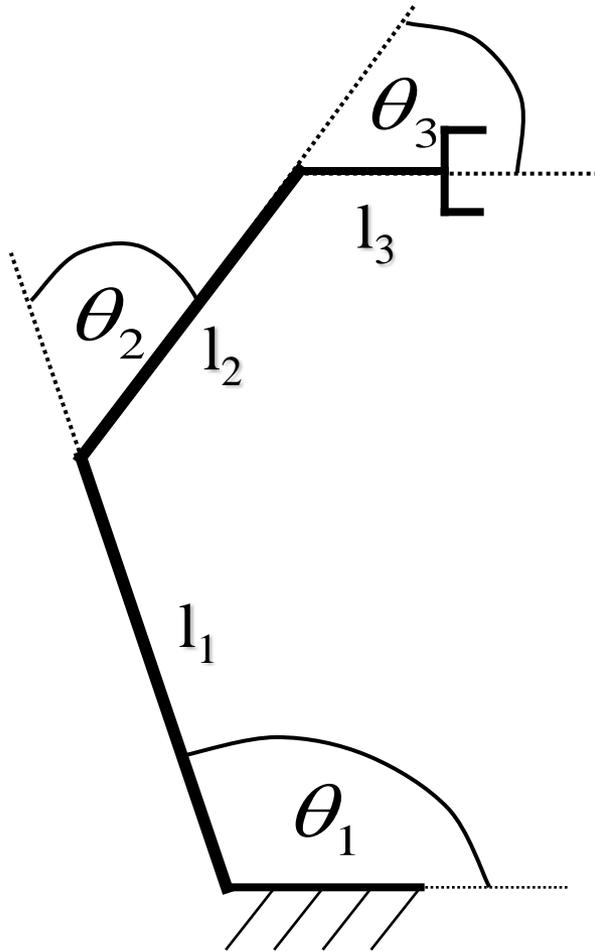
$$c_\phi = c_{123} \quad s_\phi = s_{123}$$

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$$

➔ Nach θ auflösen

Beispiel (3)



Summe der Quadrate von (3) und (4)

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2c_2$$

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \Rightarrow \theta_2$$

- Zwei Lösungen für θ_2 sind möglich. Warum?

Beispiel (4)

Berechnung von θ_1 :

Aus Koeffizientenvergleich: $x = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$$

Additionstheorem: $x = l_1 c_1 + l_2 (c_1 c_2 - s_1 s_2)$

$$y = l_1 s_1 + l_2 (s_1 c_2 + s_2 c_1)$$

Vereinfachen: $x = (l_1 + l_2 c_2) c_1 - (l_2 s_2) s_1$

$$y = (l_1 + l_2 c_2) s_1 + (l_2 s_2) c_1$$

➡ Auflösung schwierig. Hilfe durch Schablonen für typische Gleichungen (MAPLE).

Algorithmus zur algebraischen Lösung

Problem

Oft können nicht alle Gelenkwinkel aus den 12 Gleichungen bestimmt werden.

Ansatz

- Nutze Kenntnis der Transformationen aus, um die Chancen für analytisch lösbare Gleichungen zu erhöhen.

Gegeben:

Die Transformationsmatrizen $A_{0,1}, A_{1,2}, \dots, A_{n-1,n}$ und T_{TCP}

Gesucht:

Die Gelenkwinkel θ_1 bis θ_n

Algorithmus zur algebraischen Lösung

$$T_{TCP} = A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot A_{2,3}(\theta_3) \cdot A_{3,4}(\theta_4) \cdot A_{4,5}(\theta_5) \cdot A_{5,6}(\theta_6) \quad (1)$$

Vorgehensweise

- 1) Invertiere $A_{0,1}(\theta_1)$ und multipliziere beide Seiten der Gleichung (1) mit $A_{0,1}^{-1}$
- 2) Versuche aus dem neu entstehenden Gleichungssystem eine Gleichung zu finden, die nur eine Unbekannte enthält und löse diese Gleichung nach der Unbekannten.
- 3) Versuche eine Gleichung im Gleichungssystem zu finden, die durch die Substitution der im letzten Schritt gefundenen Lösung nach eine Unbekannten lösbar ist.
- 4) Falls keine Lösungen mehr gefunden werden können, so muss eine weitere Matrix ($A_{1,2}(\theta_2)$) invertiert werden.
- 5) Wiederhole die Schritte 1 - 4 bis alle Gelenkwinkel ermittelt sind.

Algorithmus zur algebraischen Lösung

$$A_{0,1}^{-1} \cdot T_{TCP} = A_{1,2} \cdot A_{2,3} \cdot A_{3,4} \cdot A_{4,5} \cdot A_{5,6}$$

$$A_{1,2}^{-1} \cdot A_{0,1}^{-1} \cdot T_{TCP} = A_{2,3} \cdot A_{3,4} \cdot A_{4,5} \cdot A_{5,6}$$

$$A_{2,3}^{-1} \cdot A_{1,2}^{-1} \cdot A_{0,1}^{-1} \cdot T_{TCP} = A_{3,4} \cdot A_{4,5} \cdot A_{5,6}$$

$$A_{3,4}^{-1} \cdot A_{2,3}^{-1} \cdot A_{1,2}^{-1} \cdot A_{0,1}^{-1} \cdot T_{TCP} = A_{4,5} \cdot A_{5,6}$$

$$A_{4,5}^{-1} \cdot A_{3,4}^{-1} \cdot A_{2,3}^{-1} \cdot A_{1,2}^{-1} \cdot A_{0,1}^{-1} \cdot T_{TCP} = A_{5,6}$$

$$T_{TCP} \cdot A_{5,6}^{-1} = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} \cdot A_{3,4} \cdot A_{4,5}$$

$$T_{TCP} \cdot A_{5,6}^{-1} \cdot A_{4,5}^{-1} = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} \cdot A_{3,4}$$

$$T_{TCP} \cdot A_{5,6}^{-1} \cdot A_{4,5}^{-1} \cdot A_{3,4}^{-1} = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3}$$

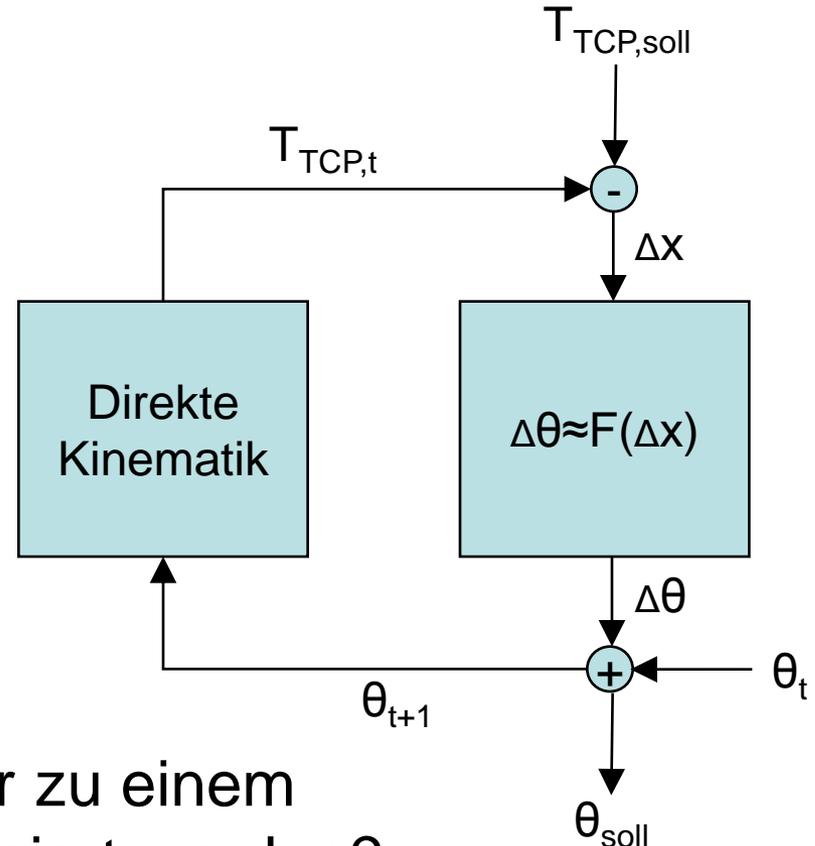
$$T_{TCP} \cdot A_{5,6}^{-1} \cdot A_{4,5}^{-1} \cdot A_{3,4}^{-1} \cdot A_{2,3}^{-1} = A_{0,1} \cdot A_{1,2}$$

$$T_{TCP} \cdot A_{5,6}^{-1} \cdot A_{4,5}^{-1} \cdot A_{3,4}^{-1} \cdot A_{2,3}^{-1} \cdot A_{1,2}^{-1} = A_{0,1}$$

- Inverses Kinematisches Problem
- Geschlossene Methoden
 - Geometrische Methoden
 - Algebraische Methoden
- Numerische Methoden
- Zusammenfassung

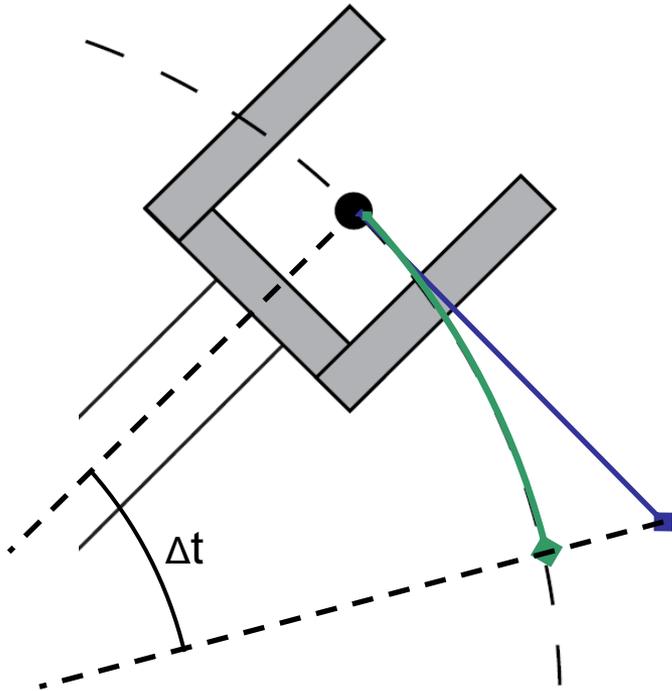
Es wird iterativ versucht, eine Lösung für den Gelenkwinkelvektor θ zu finden.

- Berechne $T_{TCP,t}$ in Iteration t aus Gelenkwinkelstellungen θ_t (θ_0 =Stellung des Roboters)
- Berechne Fehler Δx aus Sollposition des TCP und berechneter Position
- Benutze approximiertes inverses kinematisches Modell F um Gelenkwinkelfehler $\Delta\theta$ zu berechnen
- Berechne $\theta_{t+1} = \theta_t + \Delta\theta$
- Fahre mit Iteration $t+1$ fort



Wie kann der Gelenkwinkelfehler zu einem Fehler in der TCP-Lage approximiert werden?

Ansatz: Linearisierung



Lage des TCP:

$$f(\theta)$$

Änderung der Lage bei Bewegung:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta}$$

Annahme:

Modell gültig für Zeitspanne Δt

➡ Approximation der Bewegung

Jacobi Matrix

$$x(t) = f(\theta(t)) \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

n: Anzahl Bew.-Freiheitsgrade

m: Anzahl Freiheitsgrade

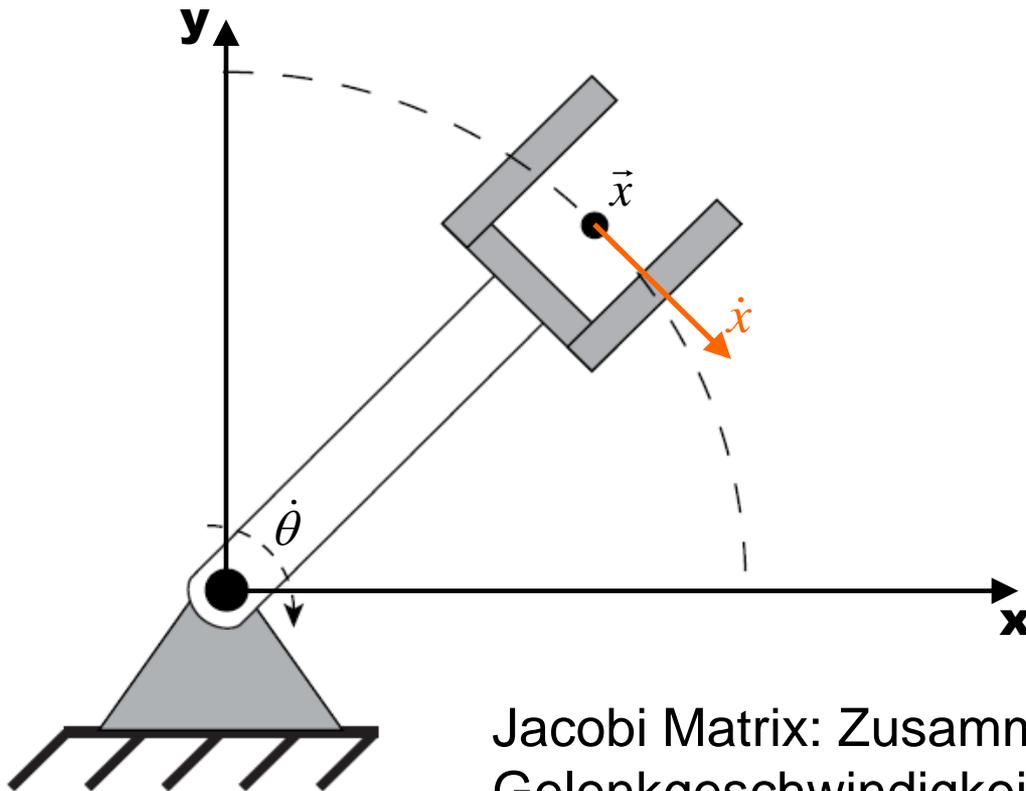
$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = J(\theta) \dot{\theta}(t)$$

Ableitung von f
Innere Ableitung

Jacobi Matrix ist die Matrix sämtlicher partieller Ableitungen der Funktion f:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \quad J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Jacobi Matrix – geometrische Interpretation



$$\theta = 45^\circ$$

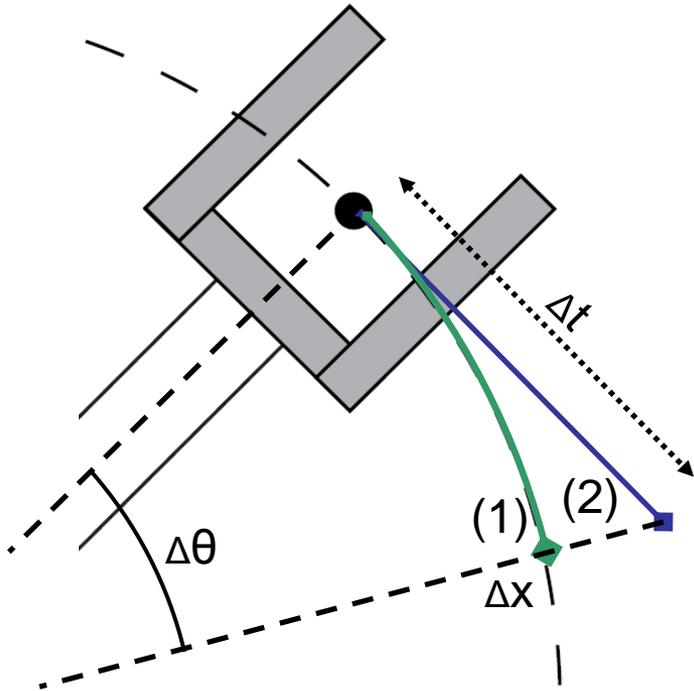
$$\dot{\vec{x}}(t) = J(\theta) \dot{\theta}(t)$$

$$J(45^\circ) = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Skalar abhängig von Länge

Jacobi Matrix: Zusammenhang zwischen Gelenkgeschwindigkeit und Geschwindigkeit im kartesischen Raum.

Differenzenquotient



(1) Tatsächliche Bewegung gemäß

$$\dot{x}(t) = J(\theta) \dot{\theta}(t)$$

(2) Angenäherte Bewegung im Intervall Δt mittels Differenzenquotient:

$$\Delta x \approx J(\theta) \Delta \theta$$

Durch Übergang vom Differentialquotienten zum Differenzenquotienten wird die Änderung approximiert. Dadurch wird das Problem linearisiert.

Umkehrung

$\Delta x \approx J(\theta) \Delta \theta$ nähert Vorwärtskinematik an.

$\Delta \theta \approx J^{-1}(\theta) \Delta x$ nähert inverse Kinematik an.

Fälle

- $n=m$: Invertierung der Jacobi-Matrix möglich
- $n>m$: Inverse existiert nicht

Benutze generalisierte inverse Matrix: „Pseudoinverse“

$$\Delta x = J \Delta \theta$$

$$J^T \Delta x = (J^T J) \Delta \theta \quad \Rightarrow \quad J^\pm = (J^T J)^{-1} J^T$$

$$(J^T J)^{-1} J^T \Delta x = \Delta \theta$$

Ansatz

1. Vorwärtskinematik als Funktion:

$$x(t) = f(\theta(t))$$

$x(t)$: Beschreibungsvektor der TCP Lage

$\theta(t)$: Gelenkwinkelstellungen

2. Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = J(\theta) \dot{\theta}(t)$$

$\dot{x}(t)$: Geschwindigkeiten des TCP

$\dot{\theta}(t)$: Winkelgeschwindigkeiten der Gelenke

$J(\theta)$: Jacobi Matrix

3. Übergang zum Differenzenquotienten:

$$\Delta x \approx J(\theta) \Delta \theta$$

Δx : Fehler in der TCP Lage

$\Delta \theta$: Fehler im Gelenkwinkel

4. Umkehrung:

$$\Delta \theta \approx J^{-1}(\theta) \Delta x$$

Singularitäten

J^{-1} existiert nicht, wenn J singularär ist.

Die Inverse existiert genau dann, wenn $\text{rang } J = m$

Umgang mit Singularitäten

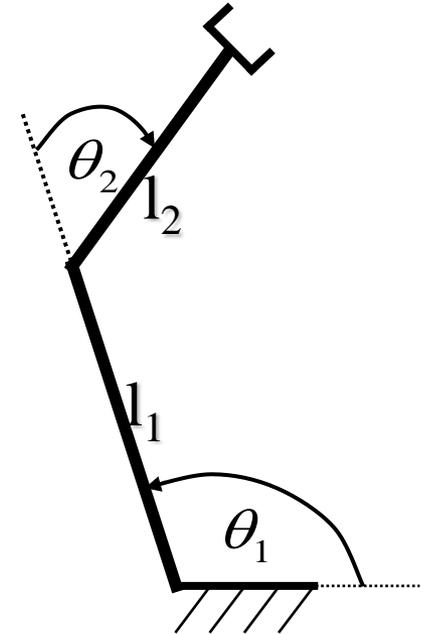
- Vermeidung von Singularitäten
- Levenberg-Marquardt Minimierung (Damped least squares)

Beispiel (1):

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = J(\theta) \cdot \dot{\theta}(t) = J(\theta) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Beispiel (2):

Die Jacobi-Matrix muss invertiert werden:

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 \sin(\theta_2)} \underbrace{\begin{pmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_{12} - l_1 c_1 & -l_1 s_{12} - l_1 s_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}(\theta)^{-1}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Abkürzungen:
 $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$
 $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$
 $c_i = \cos(\theta_i)$
 $s_i = \sin(\theta_i)$

Für $\theta_2 = 0, \pm 180$ ist $\mathbf{J}(\theta)$ singular !!!!

Alle singulären Konfigurationen liegen auf dem Rand des Arbeitsraumes.

- Inverses Kinematisches Problem
- Geschlossene Methoden
 - Geometrische Methoden
 - Algebraische Methoden
- Numerische Methoden
- Zusammenfassung

Direkte Kinematik:

$$f : R^n \rightarrow R^m \quad X = f(\theta)$$

Inverse Kinematik:

$$f^{-1} : R^m \rightarrow R^n \quad \theta = f^{-1}(X)$$

Fälle:

- Es existiert eine eindeutige Lösung.
- Es existiert eine endliche Menge von Lösungen.
- Es existiert eine unendliche Menge von Lösungen.
- Es existiert keine Lösung.

allgemeine Verfahren

- Numerische Verfahren
- allgemeine Lösungsverfahren für Gleichungssystem

⇒ hoher Aufwand

⇒ lange Zeitdauer

spezielle Verfahren

- auf trigonometrische Beziehungen basierende graphische Verfahren

⇒ schnell

⇒ nur für speziellen Robotertyp

IV. Robotermodellierung II

Ende